Лужские группы Заочной математической школы
МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги

VI ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

5–8 классы

задачи и решения

г. Луга, 2011 г.

VI Открытая олимпиада по математике Лужских групп Заочной математической школы и МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 3» г. Луги, 5–8 классы, 2011 г.

Результаты олимпиады будут опубликованы на странице `http://math.luga.ru/inf/compet/oolimp/6/`

На решение задач школьникам 5 классов отводилось 1,5 часа, 6 классов — 2 часа, 7–8 классов — 2,5 часа.

Контактный тел. (81372) 266-10, e-mail: `psp@luga.ru`.
Наш сайт в интернете: `http://math.luga.ru`

Оригинал-макет подготовлен в пакете $\LaTeX\,2_\varepsilon$ с использованием шрифтов Computer Modern с кириллическим расширением LH. Иллюстрации подготовлены в пакете `metapost`.

История олимпиады

Третий (областной) этап Всероссийской олимпиады в Ленинградской области на протяжении многих лет проводится только для 9–11 классов. Почему только для них? Да потому, что отсутствует желание у областного оргкомитета пошевелиться и подтвердить делами свои речи и отчёты о работе с теми школьниками, которых в последнее время стали называть с пафосом — *одарёнными* (а это просто нормальные любознательные дети, которым интересна математика).

Во многих городах области и районная олимпиада проводится только для старших школьников (равнение на «область»). Но олимпиадную работу среди способных детей, очевидно, необходимо начинать не с 9 класса, а раньше — и это понятно любому профессиональному педагогу.

В Луге много лет тому назад письменные личные олимпиады для учеников 5–8 классов стали проводиться по инициативе неравнодушных педагогов. В их проведении и проверке работ школьников активное участие принимали студенты — в недавнем прошлом победители олимпиад. Полезность таких профессионально подготовленных и грамотно проведённых олимпиад (с разбором задач, показом работ и возможностью апелляции) была очевидна: лужане стали занимать на областных олимпиадах не только все первые места во всех классах, но ещё и вторые — школьники привозили по 6–8 дипломов.

Затем произошли события, не укладывающиеся в рамки здравого смысла: студентов запретили допускать на олимпиады, составление задач поручили людям, не имеющим олимпиадного опыта, а разбор задач и апелляцию фактически ликвидировали. Результаты не заставили себя ждать: показатели лужских школьников катастрофически упали (уже три года у них нет ни одного первого места).

Но именно эта странная политика чиновников от образования подтолкнула инициативную группу лужских педагогов-математиков к организации *нормальной* олимпиады для школьников 5–8 классов.

В 2006 году для учеников 5–8 классов не только Лужского района, но всей Ленинградской области была проведена Первая Открытая олимпиада по математике. Мероприятие прошло успешно. Судя по отзывам детей и учителей, приезжавших с ними, олимпиада понравилась. Возникло желание сделать мероприятие регулярным. И оно таким стало!

В 2010 году состоялась V Открытая олимпиада. В состав её оргкомитета и жюри входили руководитель Лужских групп ЗМШ С. П. Павлов, учитель математики СОШ № 3 г. Луги Л. Н. Рысева и выпускник матмеха (математико-механического факультета) СПбГУ А. С. Рыжков.

Составы жюри V Открытой олимпиады
по 5 классу: студент матмеха СПбГУ И. В. Меженько, студенты ВШЭ СПбГУ Г. В. Александров, А. Г. Ремнёв, М. С. Макарочкин, студент СПбГТУ К. С. Грибов, Д. И. Белокриницкий, ученик 9 класса Е. Фролов;
по 6 классу: студенты матмеха СПбГУ М. А. Бауэр и Е. К. Бабаджанянц, студент СПбГЭТУ А. Ю. Калинин, 9-классник И. Белехов и 11-классник Г. Каплинский;
по 7 классу: выпускник матмеха, аспирант СПбГУ ИТМО И. А. Ларионов, выпускник матмеха А. В. Шубаков, студенты матмеха СПбГУ А. С. Каваленков, Е. В. Степанов и С. С. Шорохов, студент СПбГУ ИТМО А. Ю. Ермаков, 11-классник Р. Резник;
по 8 классу: выпускник матмеха, аспирант В. И. Щипцов, выпускница матмеха Е. В. Шавердова, студенты матмеха Д. В. Копин, А. С. Расторгуев, студентка экономического факультета СПбГУ Н. В. Елизарова.

Почти все названные выше члены жюри — бывшие или нынешние ученики ЗМШ и ЛМШ (Летней математической школы). Но не просто ученики, а люди, понимающие, что внесение своего вклада в развитие математического образования школьников России — это не просто высокие слова. Это — важное дело. И, как всякое большое дело, совершается оно усилиями не одного человека, а стараниями многих людей. Приятно осознавать, что это понимают те, кто когда-то учился в Заочной и Летней математических школах. Спасибо им за понимание и помощь!

В V Открытой олимпиаде (2010 г.) участвовали школьники Гатчины (лицей № 3, СОШ № 8 и № 9) и Гатчинского района (Сиверская гимназия, Коммунарская школа), Луги (СОШ № 3), Соснового Бора (СОШ № 2), Великого Новгорода (гимназия № 2) — всего 180 человек.

На решение задач 5-классникам отводилось 1,5 часа, 6-классникам — 2 часа, ученикам 7–8 классов — 2,5 часа. Разумеется, в 7 и 8 классах хотелось бы предоставить больше времени, но жюри было необходимо успеть проверить работы, сообщить участникам о критериях проверки, провести показ работ (каждый участник получал свою работу, смотрел её и мог апеллировать — просить перепроверить решения тех или иных задач), подвести итоги, наградить призёров, причём закончить всё это не поздно — так, чтобы иногородние успели на непозднюю электричку.

Но овчинка стоит выделки: удаётся для школьников устроить праздник знаний, в котором могут участвовать не только те, кому разрешают участвовать в олимпиаде, не только победители районного тура (как это сделано в системе Всероссийской олимпиады), а любой желающий, которому интересна математика. И в этом главная ценность наших Открытых олимпиад.

Условия и решения задач 5 класса

• **5.1.** Таня написала в некотором порядке 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, поставила между ними по одному знаку: $+$, $-$, $\times$, $:$. Оказалось, что значение полученного выражения равно количеству Таниных кукол. Составьте и Вы такое выражение, постаравшись при этом, чтобы его значение было как можно меньше. Напишите, чему равно это значение.

Ответ: **наименьшее возможное значение равно 0.**

Решение: $1 + 5 - 4 \times 3 : 2 = 0$. Значит, наименьшее возможное значение равно нулю.

• **5.2.** Дядя Фёдор по дороге в Простоквашино увидел на одном столбе три указателя, показывающих в одну и ту же сторону: на первом было написано, что до Простоквашино меньше 10 км, на втором, что меньше 9 км, а на третьем значилось, что меньше 8 км. Известно, что среди этих указателей только один неверный. Какие из указателей могли оказаться верными?

Ответ: **первый и второй.**

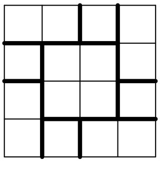
Решение: 1) Третий указатель верным быть не может, т. к. тогда были бы верными первый и второй, и, тем самым, неверного указателя не было бы вовсе.

2) Первый указатель верный, если до деревни, например, 8 км.

3) Второй указатель верный в этом же случае.

• **5.3.** Яна разделила доску 4×4, состоящую из 16 одинаковых клеток, на несколько прямоугольников по границам клеток так, что равные прямоугольники не соприкасаются ни сторонами, ни углами. Сделайте это и Вы, постаравшись, чтобы число прямоугольников было как можно больше. (Равными называются прямоугольники, которые совпадают при наложении.)

Ответ: **максимальное возможное число прямоугольников равно 9 (см. рисунок).**



• **5.4.** Число 24 обладает тем свойством, что делится как на сумму своих цифр (на 6), так и на их произведение (на 8). Найдите как можно больше *трёхзначных* чисел от 100 до 220, которые обладают таким свойством: делятся как на сумму своих трёх цифр, так и на их произведение.

Ответ: **111, 112, 132, 135, 144, 216.**

• **5.5.** На шахматной доске 6×6 расставьте несколько коней так, чтобы все свободные клетки доски оказались битыми. Постарайтесь, чтобы число коней было как можно меньше.

Ответ: **наименьшее возможное число коней равно 8.**

Решение: 8 коней можно поставить так: в 4 угла и в 4 центральные клетки доски.

Условия и решения задач 6 класса

• **6.1.** Таня написала в некотором порядке 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5, поставила между ними по одному знаку: $+$, $-$, $\times$, : . Оказалось, что значение полученного выражения равно количеству Таниных кукол. Какое число могло получиться у Тани, если известно, что кукол у неё больше одной, но меньше восьми?

Ответ: **2, 3, 4, 5, 6, 7.**

Решение: $4:2\times3+1-5=2$, $4+5-2:1\times3=3$, $4:2\times1+5-3=4$, $2:1\times3+4-5=5$, $2:1\times4+3-5=6$, $2:1\times3+5-4=7$.

• **6.2.** На мысе Дурдомный живут только Принцессы и Шуршавчики. Шуршавчики лгут, говоря про свои украшения, а в остальных случаях говорят правду. Принцессы лгут, говоря про Шуршавчиков, а в остальных случаях говорят правду. Вот разговор двух жителей Дурдомного:

А: Все мои украшения подарены мне самой красивой Принцессой.

В: Ты лжёшь.

Установите, Шуршавчиком или Принцессой является каждый из собеседников.

Ответ: **оба — Шуравчики.**

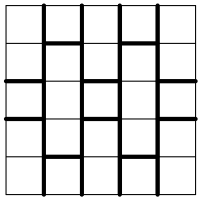
Решение: 1) Предположим, что А — Принцесса, тогда её утверждение истинно. Следовательно, утверждение В, сказанное про Принцессу, — ложь. Но из условия следует, что никто не лжёт, говоря о Принцессах. Значит, А — не Принцесса, а Шуршавчик.

2) Поскольку Шуршавчик А говорил о своих украшениях, то он лгал. Выходит, утверждение В истинно. Следовательно, В — не Принцесса, т. е. Шуршавчик.

3) Проверим, что если B — Шуршавчик, то условие не нарушается. Действительно, Шуршавчик A лжёт о своих украшениях, а Шуршавчик B говорит правду о Шуршавчике A, что соответствует условию задачи.

• **6.3.** Оля разделила доску 5×5, состоящую из 25 одинаковых клеток, на несколько прямоугольников по границам клеток так, что равные прямоугольники не соприкасаются ни сторонами, ни углами. Сделайте это и Вы, постаравшись, чтобы число прямоугольников было как можно больше. (Равными называются прямоугольники, которые совпадают при наложении.)

Ответ: **максимальное возможное число прямоугольников равно 15 (см. рисунок).**



• **6.4.** Число 36 обладает тем свойством, что делится как на сумму своих цифр (на 9), так и на их произведение (на 18). Найдите как можно больше *трёхзначных* чисел от 140 до 450, которые обладают таким свойством: делятся как на сумму своих трёх цифр, так и на их произведение.

Ответ: **144, 216, 224, 312, 315, 432.**

• **6.5.** На шахматной доске 6×6 расставлены несколько коней так, что все свободные клетки доски оказались битыми. а) Докажите, что коней не меньше четырёх. б) Расставьте в соответствии с условием несколько коней, постаравшись, чтобы их число было как можно меньше.

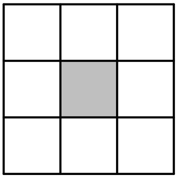
Ответ: **б) наименьшее возможное число коней равно 8.**

Решение: а) Разобьём поле на 4 равных квадрата. В каждом из них должен стоять хотя бы один конь (чтобы бить угловую клетку или стоять на ней). Значит, коней не менее четырёх.

б) 8 коней можно поставить так: в 4 угла и в 4 центральные клетки доски.

Условия и решения задач 7 класса

• **7.1.** Можно ли в 8 белых клетках квадрата 3×3 (см. рисунок) расставить 8 различных простых чисел так, чтобы были одинаковыми 4 суммы — в левом столбце, правом столбце, верхней строке, нижней строке? (Простым называется натуральное число, у которого ровно два натуральных делителя — само число и единица.)



Ответ: **можно.**

Решение: Например, так, как показано на рисунке.

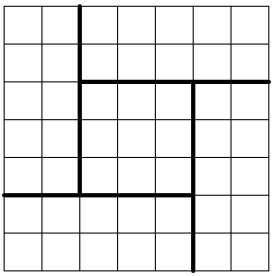
19	101	29
107		103
23	109	17

• **7.2.** Таня написала три различных числа. Петя возвёл первое число в квадрат и прибавил к результату произведение двух других чисел. А Саша первое число умножил на сумму двух других чисел. Могли ли у Пети и Саши получиться одинаковые ответы?

Ответ: **не могли.**

Решение: Обозначим числа x, y, z. Тогда Петин результат x^2+yz, а Сашин $x(y+z)$. Докажем методом от противного, что эти результаты не могут быть равными. Пусть $x^2 + yz = x(y + z)$. Преобразуем это равенство: $x^2 + yz = x(y + z) \Leftrightarrow x^2 + yz - xy - xz = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(x-y) - z(x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-z)(x-y) = 0$. Следовательно, либо $x = z$, либо $x = y$, чего быть не может, т. к. числа различны.

• **7.3.** Катя разрезает квадрат 7×7, состоящий из 49 одинаковых клеток, на 5 прямоугольников, не повреждая клетки. Марина выбирает тот прямоугольник, в котором число клеток наибольшее (если таких не один, то любой из них). Какое наименьшее число клеток может содержать выбранный Мариной прямоугольник?



Ответ: **10 клеток.**

Решение: <u>1-я часть</u>. Пример Катиного разрезания, при котором выбранный Мариной прямоугольник содержит 10 клеток, приведён на рисунке.

2-я часть. Докажем, что меньше 10 клеток в Маринином прямоугольнике быть не может, методом от противного. Пусть это не так, и выбранный Мариной прямоугольник имеет не более 9 клеток. Тогда в каждом из остальных прямоугольников клеток не больше 9, а во всех 5 прямоугольниках их не более 45, что противоречит тому, что в данном квадрате 49 клеток.

• **7.4.** На координатной плоскости построена окружность с центром в начале координат O и радиусом 3 см. На оси абсцисс отмечена точка A, на оси ординат — точка B, на построенной окружности — точка C. Оказалось, что четырёхугольник $OACB$ — прямоугольник. Докажите, что $AB < \frac{22}{7}$ см.

Решение: Поскольку $OACB$ — прямоугольник, то его диагонали равны. Значит, $AB = OC = 3$ см, что меньше, чем $\frac{22}{7}$ см.

• **7.5.** Каждая клетка квадрата 5×5 выкрашена в один из 3 цветов, причём все три цвета использованы. Ваня пытается найти несколько направлений (направления — это столбцы и строки), таких что в них содержатся все три цвета. Какого наименьшего числа направлений Ване наверняка хватит?

Ответ: **двух.**

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	2	1
1	1	1	1	3

Решение: 1) Докажем, что двух направлений всегда хватит. Возможны два случая. Если есть столбец, в котором имеются клетки хотя бы двух цветов, то Ваня возьмёт его и тот столбец, в котором есть клетка третьего цвета. Если же такого столбца нет, то в каждом столбце клетки одноцветные. Тогда Ваня берёт любую строку — в ней содержатся все три цвета.

2) Пример, когда одного направления Ване не хватит, приведён на рисунке.

Условия и решения задач 8 класса

• **8.1.** В пяти клетках таблицы 3×3 стоят простые числа (см. рисунок). Можно ли в её пустые клетки вписать 4 простых числа так, чтобы во всех строках и столбцах таблицы суммы чисел были одинаковыми? (Простым называется натуральное число, у которого ровно два натуральных делителя — само число и единица.)

3		13
	5	
11		7

Ответ: **нельзя.**

Решение: Пусть в средней клетке последнего столбца стоит число n, тогда легко установить, какие числа стоят в остальных пустых клетках (см. рисунок). Приравнивая суммы в верхней и средней строках, получаем уравнение $n+20 = 2n+11 \Leftrightarrow n = 9$. Но 9 — число не простое.

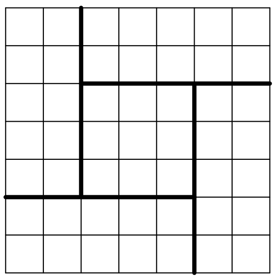
3	$n+4$	13
$n+6$	5	n
11	$n+2$	7

• **8.2.** Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но всё же больше одной конфеты. Сколько всего конфет могло быть съедено?

Ответ: **21.**

Решение: Если один из детей съел k конфет, то все остальные вместе съели $k+7$ конфет, и все дети съели всего $S = 2k+7$ конфет. Значит, $k = \frac{S-7}{2}$. Пусть количество детей равно d. Из условия задачи получаем, что $k = k(d-1) - 7 \Leftrightarrow k(d-2) = 7$. Так как 7 — число простое и $k > 1$, то $k = 7$, $d = 3$. Следовательно, общее число съеденных конфет $S = 21$.

• **8.3.** Артём разрезает квадрат 7×7, состоящий из 49 одинаковых клеток, на 5 прямоугольников, не повреждая клетки. Женя выбирает тот прямоугольник, в котором число клеток наименьшее (если таких не один, то любой из них). Какое наибольшее число клеток может содержать выбранный Женей прямоугольник?

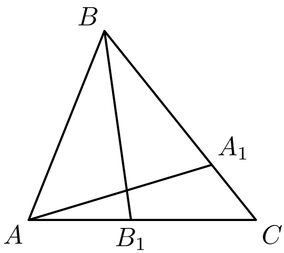


Ответ: **9 клеток.**

Решение: 1-я часть. Пример разрезания, при котором выбранный Женей прямоугольник содержит 9 клеток, приведён на рисунке.

2-я часть. Докажем, что больше 9 клеток Женин прямоугольник содержать не может, методом от противного. Пусть это не так, и в выбранном Женей прямоугольнике не менее 10 клеток. Тогда в каждом из остальных прямоугольников клеток не менее 10, а во всех 5 прямоугольниках их не менее 50, что противоречит тому, что в исходном квадрате 49 клеток.

• **8.4.** В треугольнике ABC на сторонах BC и AC взяты точки A_1 и B_1 соответственно, так что $AA_1 = BB_1$, причём каждый из отрезков AA_1 и BB_1 разбивает треугольник ABC на два треугольника с равными периметрами. Докажите, что треугольники ABA_1 и ABB_1 равны.



Решение: Поскольку периметры треугольников AA_1B и AA_1C равны, то $AB + BA_1 = AC + CA_1$ (см. рисунок), т. е. каждая из этих сумм — это p (полупериметр треугольника ABC). Значит, $BA_1 = p - AB$. Аналогично: так как периметры треугольников AB_1B и BB_1C равны, то $AB + AB_1 = BC + CB_1$ и $AB_1 = p - AB$. Следовательно, $AB_1 = BA_1$. Значит, треугольники ABA_1 и ABB_1 равны по трём сторонам.

• **8.5.** Различные числа x, y, z таковы, что $x^2 + yz > x(y+z)$. Определите, какое из этих чисел наименьшее, если известно, что y — наибольшее из них.

Ответ: x.

Решение: Преобразуем исходное выражение. $x^2 + yz > x(y+z) \Leftrightarrow \Leftrightarrow x^2+yz-xy-xz > 0 \Leftrightarrow x(x-y)-z(x-y) > 0 \Leftrightarrow (x-z)(x-y) > 0$. Так как y — наибольшее из чисел, то $x - y < 0$. Значит, $x - z < 0$, т. е. $x < z$. Следовательно, наименьшее из чисел — это x.